**תרגיל בית 4**

**מגיש: אור דינר**

**ת.ז: 207035809**

שאלה 1

הראו דח"ה עבור השפה .

נתבונן בדח"ה עם החוקים הבאים:

רעיון: נכניס את המילה בעלת האורך המינימלי שמתקבלת בשפה L, ולאחריה עבור כל b שמכניסים נכניס או 2 או 3 או 4 a. אופן ההכנסה שתואר מאפשר לכל מילה שמתקבלת על ידי הדח"ה להיות מהצורה של מילים מהשפה L.

נוכיח בעזרת הכלה דו כיוונית שמתקיים .

1. *תהי , אז היא שרשרת גזירות על ידי הנונטרמינלים ו-, כך שכמות ה- בהתחלה היא: עבור (כולל 0), כאשר כמות ה- היא בדיוק זאת לפי חוקי הגזירה. נבדוק האם מתקיים:*

*מתקיים תמיד*

*מתקיים תמיד*

קיבלנו שכמות ה- תמיד בין 2 כמות ה- ל-4 כמות ה- כפי שדרוש לשפה , לכן כל מילה בדח"ה תהיה גם בשפה .

1. *תהי אז , על מנת לקבל את המילה הזו באמצעות הדח"ה , נגזור את ואז את למשך פעמים. נקבל מילה כך ש-* והראינו כבר שהביטוי הזה נמצא בתחום של בין ל-*. לכן כל מילה ב- היא גם ב-.*

שאלה 2

יהיו מכונת טיורינג ו- אוטומט מחסנית כפול.

סעיף א

תהי שפה שפת הא"מ הכפולה, נראה שאפשר לייצגה בעזרת מכונת טיורינג. נזכיר כי מכונת טיורינג היא סרט עם ראש קורא שתומך בתזוזה ימינה/שמאלה קריאה וכתיבה. נזכיר גם כי כל א"מ מקבל מילה אם מסלול החישוב שלה נגמר במצב מקבל וגם המחסנית ריקה, לכן ב- נגדיר שהמחסניות צריכות להיות ריקות כדי שהמילה תתקבל. נוכיח שניתן לייצג מ"ט בעזרת באמצעות בניה:

נגדיר:

*נניח בה"כ ששפת 2 המחסניות זהה, כלומר האותיות שאפשר לדחוף לכל מחסנית הן מאותו א"ב.*

סעיף ב

שאלה 3

סעיף א

לפי הגדרת אנחנו יכולים לומר שהמשלים שלה הוא השפה , כלומר, ב- יהיו מכונות הטיורינג שמקבלות **או** נכנסות ללולאה אינסופית עבור ה- שלהן, והשפה מהווה רק חלק מהגדרה – בכך שהיא מכילה מככונות טירוינג שרק מקבלות את ה- שלהן ולא מכסה את המקרה בו המ"ט תיכנס ללולאה אינסופית. ישנן מכונות טייורינג שייכנסו ללולאה אינסופית על ה- שלהן ולא יהיו חלק מ- *.*

סעיף ב

נבנה מ"ט שבהינתן קידוד של מ"ט מ-ACCEPT – רצה, עוצרת, ופולטת קידוד כך שיתקיים:

ומתקיים:

נגדיר:

:

1. הרץ את M על w:
   1. אם קיבלה – דחה.
   2. אם דחתה או נכנסה ללולאה – קבל.

נוכיח את הנכונות של הבנייה:

* אם , אז מקבלת את מריצה את ודוחה תמיד, כלומר . ומשום ששפת המ"ט היא השפה הריקה בפרט היא תדחה כל מילה ולכן היא תהיה חלק מ-:

.

* אם , אז לא מקבלת את מריצה את ומקבלת תמיד, כלומר . ומשום ששפת המ"ט היא השפה של כל המילים, היא תקבל כל מילה ולכן לא תהיה חלק מ-:

.

סעיף ג

נבנה מ"ט שבהינתן קידוד של מ"ט מ-REJECT – רצה, עוצרת, ופולטת קידוד כך שיתקיים:

ומתקיים:

נגדיר:

:

1. הרץ את M על w:
   1. אם קיבלה – דחה.
   2. אם דחתה – קבל.

נוכיח את הנכונות של הבנייה:

* אם , אז דוחה את מריצה את ומקבלת תמיד, כלומר . ומשום ששפת המ"ט היא השפה של כל המילים בפרט היא תקבל כל מילה ולכן היא תהיה חלק מ-:

.

* אם , אז מקבלת את (או נכנסת ללולאה) מריצה את ודוחה תמיד, כלומר . ומשום ששפת המ"ט היא השפה הריקה, היא תדחה כל מילה ולכן לא תהיה חלק מ- עבור כל מילה:

.

שאלה 4

הוכח שהשפה אינה כריעה אך ניתנת לקבלה.

נוכיח את הטענה באמצעות רדוקציה מ-ACCEPT, כך ש: .

נבנה מ"ט שבהינתן קידוד של מ"ט מ-ACCEPT – רצה, עוצרת, ופולטת קידוד כך שיתקיים:

ומתקיים:

נגדיר:

:

Const a = <M>, b = w

1. הרץ את M על w והחזר מה שהיא מחזירה.

נוכיח את הנכונות של הבנייה:

* אם , אז מקבלת את מריצה את ומחזירה את מה ש-M מחזירה, כלומר מקבלת כל x. וזה אומר ששפת מכילה אינסוף מילים כי . לכן מתקיים:

.

* אם , אז לא מקבלת את מריצה את ומחזירה את מה ש-M מחזירה, כלומר דוחה כל x. וזה אומר ששפת מכילה 0 מילים כי ולכן מתקיים: כי מ"ט ששפתם ריקה אינם נכללים ב-L.

הראינו רדוקציה נכונה מ-ACCEPT וזה אומר ש-L ניתנת לקבלה, ומשום שמתקיים עבור רדוקציות מיפוי עבור :

1. כריעה כריעה. במקרה שלנו אנחנו יודעים ש-ACCEPT לא כריעה ולכן L לא יכולה להיות כריעה (אחרת ACCEPT הייתה כריעה).

שאלה 5

הוכח שהשפות הבאות אינן ניתנות לקבלה.

סעיף א

*נוכיח את הטענה באמצעות רדוקציה מ-.*

נבנה מ"ט שבהינתן קידוד של מ"ט מ- – רצה, עוצרת, ופולטת קידוד כך שיתקיים:

ומתקיים:

נגדיר:

:

Const a = <M>, b = w

1. החזר את התוצאה ההפוכה של ההרצה של M על w. (אם M מקבלת את w – דחה, ולהיפך).

נוכיח את הנכונות של הבנייה:

* אם , אז לא מקבלת את מריצה את ודוחה תמיד. לכן לא תקבל אף מילה שמתחילה ב-x. ובכזה מצב מתקיים: כי השפה של 'M ריקה.
* אם , אז מקבלת את מקבלת את כל המילים תמיד אז מתקיים . לכן מתקיים: כי 'M תקבל גם מילים שמתחילות ב-x (מילים כאלה נמצאות ב-.).

סעיף ב

נמצא רדוקציה ל- מ-.

נבנה מ"ט שבהינתן קידוד של מ"ט מ- – רצה, עוצרת, ופולטת קידוד כך שיתקיים:

ומתקיים:

נגדיר:

– מריצה את על ונוהגת כמוה.

– מכונת טיורינג שמקבלת כל מילה.

נוכיח שהרדוקציה עובדת.

* אם , אז לא מקבלת את דוחה כל קלט שהיא תקבל אז היא שפתה היא השפה הריקה וגודלה הוא 0, שהוא גודל קבוע, לעומת השפה של שהיא כל המילים האפשריות שהוא גודל לא קבוע, לכן מתקיים גם .
* אם , אז מקבלת את מקבלת כל קלט שהיא תקבל אז היא שפתה היא השפה של כל המילים וגודלה הוא אינסופי ולא קבוע, השפה של היא בכל אופן שפת כל המילים האפשריות שהוא גודל לא קבוע, לכן מתקיים גם .

שאלה 6

סעיף א

*השפה הינה ח"ה.*

*נשים לב ש-, ובנוסף, נוכיח שהאיחוד הוא שפה חסרת הקשר ואז לפי סגירות של איחוד שפות ח"ה בגלל שהאיחוד ח"ה (הראינו בכיתה – אפשר לבנות דח"ה), אז כל קבוצה לחוד צריכה להיות ח"ה.*

*ניתן לתאר את באמצעות הדח"ה הבא:*

*קל לראות שהדח"ה מתאר את בדיוק, ובגלל שיש לה דח"ה היא ח"ה, ואז מתקיים חסרת הקשר וגם, אז בהכרח ח"ה.*

*כעת נוכיח שאינה רגולרית באמצעות למת הניפוח לשפות רגולריות:*

עבור כל שמקיים ש- , קיים כך שפירוק למילה , ומתקיים:

1. ולכל מתקיים

*נבחן את המילה , לפי התנאי 1 ו-2 מכיל רק את האות . כאשר ננפח את המילה באמצעות נקבל שהמילה המנופחת תהיה , אבל היא לא מקיימת את תנאי 3 ולא חלק מהשפה, ולכן היא אינה רגולרית.*

סעיף ב

השפה ניתנת לקבלה אבל אבל כריעה, נוכיח את זה בעזאת רדוקציה מ-HALT.

נבנה מ"ט שבהינתן קידוד של מ"ט מ- – רצה, עוצרת, ופולטת קידוד כך שיתקיים:

ומתקיים:

נגדיר:

:

Const a = <M<

1. בדוק האם x מכיל 010.
   1. הרץ את M על w ופעל כמוה.
2. דחה.

נוכיח את הנכונות של הבנייה:

* אם , אז עוצרת על בודקת אם הקלט שלה מכיל 010, אם כן היא תריץ את M על w ותקבל, ואם לא היא תדחה. ובכזה מצב מתקיים: כי השפה של 'M היא כל מכונות הטיורינג שמקבלות מילה עם 010.
* אם , אז לא עוצרת על בודקת אם הקלט שלה מכיל 010, אם כן היא תריץ את M על w ותיכנס ללולאה אינסופית (כי M לא עוצרת על w), ואם לא היא תדחה. ובכזה מצב מתקיים:

.

הראינו רדוקציה מ-HALT לכן L אינה כריעה וניתנת לקבלה.

סעיף ג

נוכיח שהשפה כריעה ולא ח"ה בעזרת אינדוקציה על c.

בסיס:

**כריעות** – יוצרים מ"ט באופן הבא:

1. נשווה את מה שנמצא בראש הקורא בתא הראשון למה שנמצא בראש הקורא בתא האחרון (רצים ימינה עד שרואים את התו " " (רווח) ואז זזים שמאלה פעם אחת).
   1. אם הם זהים – קבל.
   2. אם הם שונים – דחה.

**לא ח"ה** – במקרה הזה השפה היא חסרת הקשר כי אנחנו מוודאים תו אחד ואפשר לבדוק את זה בעזרת אס"ד.

טענת האינדוקציה – נניח עבור ונוכיח עבור .

**כריעות** – יוצרים מ"ט באופן הבא:

1. אם : קבל.
2. אחרת:
   1. נשווה את מה שנמצא בתא השמאלי ביותר על הסרט למה שנמצא בתא במקום ה-i מהסוף (רצים ימינה עד שרואים את התו " " (רווח) ואז זזים שמאלה i פעמים) – בעצם משווים כל אות של ה- במחרוזת בהתאמה.
      1. אם הם זהים – חזור לצעד 2.
      2. אם הם שונים – דחה.

משום שהראינו שקיימת מ"ט שעוצרת על כל קלט (רצה ב-) היא כריעה.

**לא ח"ה** – נוכיח שהשפה אינה ח"ה בעזרת למת הניפוח לשפות ח"ה.

נניח ש חסרת הקשר, לפי למת הניפוח לשפות חסרות הקשר קיים כך שלכל ו- קיימים 5 מילים כך ש- ומתקיימים שלושת תנאי הלמה:

1. *עבור כל מתקיים*

*נבחר אשר היא מילה בשפה . נבחר*

*הגענו לסתירה ולכן לא יכולה להיות חסרת הקשר.*